Fonctions

1. Parité d'une fonction f

Définition

Si $E \subseteq \mathbb{R}$ alors :

E est symétrique par rapport à 0 ssi $\forall x \in E, -x \in E$.

Définition

Si $\begin{cases} f: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$ alors :

f est paire ssi $\begin{cases} E \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in E,\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

f est impaire ssi $\begin{cases} E \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in E,\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

Propriété

Si $\begin{cases} f: E \longrightarrow \mathbb{R} \\ E \subseteq \mathbb{R} \end{cases}$ alors,

dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$,

si f est paire alors l'axe des ordonnées est un axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$

si f est impaire alors le point O est un centre de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 1

1) Prouver que la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$ est paire.
2) Prouver que la fonction $f: [-2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto |x|$ n'est pas paire.
3) Prouver que la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2x$ est impaire.
4) Prouver que la fonction $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}: x \mapsto 2x + 3$ n'est ni paire ni impaire.

2. FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

FONCTION CARRÉ ET FONCTION TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Dans tout ce qui suit, on travaille dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Fonction carré

- La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$:
- La courbe représentative (C_f) est une parabole de sommet O.

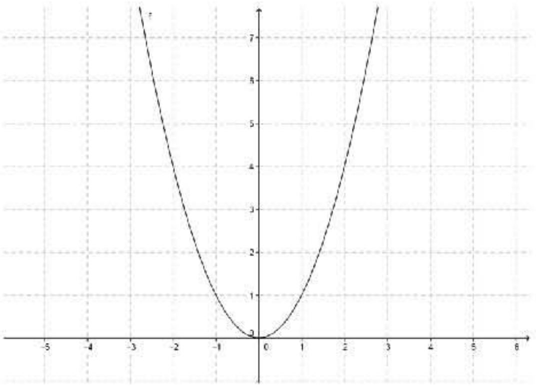


Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
variations de f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

- $\forall x\in\mathbb{R};\ (-x)\in\mathbb{R}\ et\ f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$:
  on dit que la fonction carré est paire,
  sa représentation graphique (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- « un carré est toujours positif » $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R};\ f(x)\geq 0$

Graphiquement : (C_f) est située au dessus de l'axe des abscisses.

- Dans $\mathbb{R}$: l'équation $x^2=a$ possède :
  - deux solutions si $a>0$: $S=\{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}$
  - une solution si $a=0$: $S=\{0\}$
  - aucune solution si $a<0$: $S=\varnothing$

2. Fonction trinôme du second degré

- On appelle trinôme du seconde degré toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$, avec *a, b, c* réels et $a \neq 0$.

Exemples : $f(x)=2x^2+3x+1;\ a=2, b=3, c=1,$

$f(x)=x^2-1;\ a=1, b=0, c=-1,$

$f(x)=x^2;\ a=1, b=0, c=0,$

$f(x)=3x^2-2x+1;\ a=3, b=-2, c=1,$

$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ n'est pas un trinôme du second degré.

- $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$

Cette écriture est appelée **forme canonique de *f***.

Exemples : $f(x)=x^2-4x+1=x^2-2.2x+2^2-2^2+1=\underline{(x-2)^2-3}$;

$f(x)=3x^2-6x+5=3\left(x^2-2x+\dfrac{5}{3}\right)=3\left(x^2-2.1x+1^2-1^2+\dfrac{5}{3}\right)=$

$3\left[(x-1)^2+\dfrac{2}{3}\right]=3(x-1)^2+2$

3. Equation du second degré

- Une équation du second degré est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2+bx+c=0$, les solutions de cette équations sont appelées les racines du trinôme.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2-x-6=0$

$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}\right)=0$

$x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3 \ ou\ x=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}=-2 \qquad S=\{-2;3\}$

- **Théorème :**

Soit l'équation E : $f(x)=0 \Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$, posons $\Delta = b^2-4ac$ (le discriminant) :
Alors :

$$\begin{aligned} & ax^2+bx+c=0 \\ \Leftrightarrow\ & a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \\ \Leftrightarrow\ & a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\ & a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \end{aligned}$$

D'où si $\Delta>0;\ a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$;

si $\Delta=0;\ a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-0\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)=0$;

si $\Delta<0;\ a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right)\neq 0$.

	Solutions de E	Factorisation de $f(x)$
$\Delta>0$	$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$
$\Delta=0$	$x_0=-\frac{b}{2a}$	$f(x)=a(x-x_0)^2$
$\Delta<0$	$\varnothing$	aucune

x_0, x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $f(x)$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2-x-6=0$

$a=1,\ b=-1,\ c=-6 \quad \Rightarrow \Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)=25=5^2$

$x_1=\frac{1+5}{2}=3$, $x_2=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad S=\{-2;3\}$

et $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

- **▪ Somme et produit des racines d'un trinôme du second degré :**

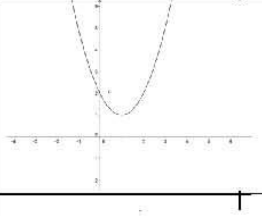
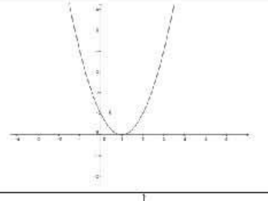
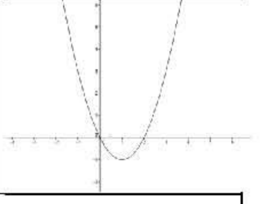
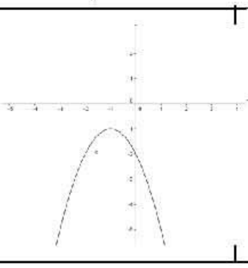
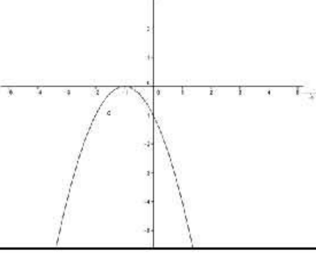
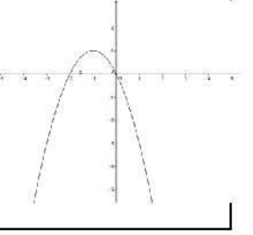
Lorsque $\Delta>0$ on a $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a\left[x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right]=a\left(x^2-S\cdot x+P\right)$; $S=x_1+x_2 \quad P=x_1\cdot x_2$

Si en plus $a=1$, on a : $\begin{cases} S=x_1+x_2=-b \\ P=x_1\cdot x_2=c \end{cases}$

Exemple : $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$ $\begin{cases} 3-2=1 \\ 3\times(-2)=-6 \end{cases}$

4. Représentation graphique

L'allure de la courbe représentative d'un trinôme du second degré suivant le signe de Δ :

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Nombre de racines du trinôme, solution de $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$	aucune	une unique (racine double)	deux
$a > 0$ « la parabole tournée vers le haut »			
$a < 0$ « la parabole tournée vers le bas »			

Cas particulier a=1 : la courbe représentative (C_f) est la parabole d'équation $y = (x-\alpha)^2 + \beta$ (forme canonique), dont le sommet est $\Omega(\alpha;\beta)$.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)$.

a)	$f(x) = x^2 - 8x + 15$	b)	$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$	c)	$f(x) = -3x^2 - 6x - 3$
d)	$f(x) = -x^2 + 2x + 3$	e)	$f(x) = -x^2 + 4x - 5$	f)	$f(x) = 2x^2 - 12x + 18$
g)	$f(x) = x^2 + x - 6$	h)	$f(x) = -4x^2 - 4x - 1$	i)	$f(x) = x^2 + 2x + 3$
j)	$f(x) = -3x^2 + x + 4$	k)	$f(x) = -2x^2 + x - 3$	l)	$f(x) = 3x^2 + 12x + 12$
m)	$f(x) = x^2 + 5x + 6$	n)	$f(x) = x^2 + x + 1$	o)	$f(x) = -3x^2 + 12x - 12$
p)	$f(x) = -x^2 + 2x + 3$	q)	$f(x) = -x^2 + x - 3$	r)	$f(x) = 9x^2 + 6x + 1$

1) Factoriser f.
2) Développer la forme factorisée pour vérifier qu'elle est égale à $f(x)$.
3) Représenter schématiquement la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
4) Construire le tableau de signe de la fonction f.
5)
   a. Résourdre l'équation $f(x) = 0$.
   b. Résourdre l'inéquation $f(x) \geq 0$.
   c. Résourdre l'inéquation $f(x) > 0$.
   d. Résourdre l'inéquation $f(x) \leq 0$.
   e. Résourdre l'inéquation $f(x) < 0$.
6) Déterminer la forme canonique de la fonction f.
7) Développer la forme canonique pour vérifier qu'elle est égale à $f(x)$.
8) Déterminer les coordonnées du sommet de la parabole $(\mathcal{C}_f)$.
9) Construire le tableau de variation de la fonction f.
10) Donner l'équation réduite de l'axe de symétrie de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.
11) Points d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec les axes du repère.
   a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des ordonnées.
   b. Déterminer les coordonnées des points d'intersection (si ils existent) de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ avec l'axe des abscisses.
12) Tracer $(\mathcal{C}_f)$, la courbe représentative de la fonction f, ainsi que son axe de symétrie dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Solution de l'exercice 2

$f(x) = x^2 - 8x + 15$
Forme factorisée : $f(x) = (x-3)(x-5)$
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Equations et inéquations

- $f(x) = 0$; $S = \{3; 5\}$
- $f(x) \geq 0$; $S =]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$
- $f(x) > 0$; $S =]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$
- $f(x) \leq 0$; $S = [3; 5]$
- $f(x) < 0$; $S =]3; 5[$

Forme canonique : $f(x) = (x-4)^2 - 1$
Coordonnées du sommet S : $S(4; -1)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = -1$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; 15)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(3; 0)$ et $(5; 0)$

$f(x) = 2x^2 + 2x + 1$
Forme factorisée : f n'est as factorisable
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Equations et inéquations

- $f(x) = 0$; $S = \{\,\}$
- $f(x) \geq 0$; $S = \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$; $S = \mathbb{R}$
- $f(x) \leq 0$; $S = \{\,\}$
- $f(x) < 0$; $S = \{\,\}$

Forme canonique : $f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$
Coordonnées du sommet S : $S\left(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = \frac{-1}{2}$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; 1)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : pas de point d'intersection

$f(x) = -3x^2 - 6x - 3$
Forme factorisée : $f(x) = -3(x+1)^2$
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Equations et inéquations
- $f(x) = 0$; $S = \{-1\}$
- $f(x) \geq 0$; $S = \{-1\}$
- $f(x) > 0$; $S = \{\ \}$
- $f(x) \leq 0$; $S = \mathbb{R}$
- $f(x) < 0$; $S = \mathbb{R} - \{-1\}$

Forme canonique : $f(x) = -3(x+1)^2$
Coordonnées du sommet S : $S(-1; 0)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = -1$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; -3)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(-1; 0)$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3$
Forme factorisée : $f(x) = -(x+1)(x-3)$
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Equations et inéquations
- $f(x) = 0$; $S = \{-1; 3\}$
- $f(x) \geq 0$; $S = [-1; 3]$
- $f(x) > 0$; $S =]-1; 3[$
- $f(x) \leq 0$; $S =]-\infty; -1] \cup [3; +\infty[$
- $f(x) < 0$; $S =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$

Forme canonique : $f(x) = -(x-1)^2 + 4$
Coordonnées du sommet S : $S(1; 4)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = 1$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; 3)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(-1; 0)$ et $(3; 0)$

$f(x) = -x^2 + 4x - 5$
Forme factorisée : f n'est as factorisable
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

Equations et inéquations

- $f(x) = 0$; $S = \{\,\}$
- $f(x) \geq 0$; $S = \{\,\}$
- $f(x) > 0$; $S = \{\,\}$
- $f(x) \leq 0$; $S = \mathbb{R}$
- $f(x) < 0$; $S = \mathbb{R}$

Forme canonique : $f(x) = -(x-2)^2 - 1$
Coordonnées du sommet S : $S(2; -1)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = 2$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; -5)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : pas de point d'intersection

$f(x) = 2x^2 - 12x + 18$
Forme factorisée : $f(x) = 2(x-3)^2$
Schéma :

Tableau de signe :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Equations et inéquations

- $f(x) = 0$; $S = \{3\}$
- $f(x) \geq 0$; $S = \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$; $S = \mathbb{R} - \{3\}$
- $f(x) \leq 0$; $S = \{3\}$
- $f(x) < 0$; $S = \{\,\}$

Forme canonique : $f(x) = 2(x-3)^2$
Coordonnées du sommet S : $S(3; 0)$
Tableau de variation :

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f_{12}(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Equation réduite de l'axe de symétrie : $x = 3$
Coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées : $(0; 18)$
Coordonnées des points d'intersection avec l'axe des abscisses : $(3; 0)$

$f(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{25}{4}$	↗	$+\infty$

$f(x) = x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

$f(x) = -4x^2 - 4x - 1 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f_{26}(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

$f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad f$ n'est pas factorisable

$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	$+\infty$

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ $\quad f$ n'est pas factorisable

$f(x) = (x+1)^2 + 2$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f_{27}(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

$f(x) = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x-2)^2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

$f(x) = -3x^2 + x + 4 = -3(x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right)$

$f(x) = -3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{49}{12}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{49}{12}$	↘	$-\infty$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x+1)(x-3)$

$f(x) = -(x-1)^2 + 4$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

$f(x) = -2x^2 + x - 3$ $\quad f$ n'est pas factorisable

$f(x) = -2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{23}{8}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{23}{8}$	↘	$-\infty$

$f(x) = -x^2 + x - 3$ $\quad f$ n'est pas factorisable

$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{11}{4}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{11}{4}$	↘	$-\infty$

$f(x) = 3x^2 + 12x + 12 = 3(x+2)^2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f_{25}(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

$f(x) = 9x^2 + 6x + 1 = 9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

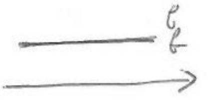
3. Les fonctions affines

Exercice 3

Les fonctions affines

Associer chaque fonction à sa courbe, et chaque courbe à son tableau des signes.

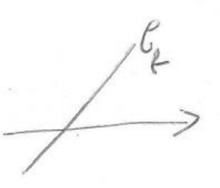
ⓐ $f(x) = 2x - 1$

① 

α

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

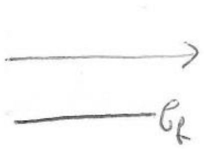
ⓑ $f(x) = -2x - 1$

② 

β

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	

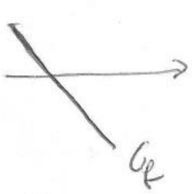
ⓒ $f(x) = 2$

③ 

γ

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	

ⓓ $f(x) = -2$

④ 

δ

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$

Solution :

a		
b		
c		
d		

Exercice 4

Factoriser, si possible, les fonctions polynômes ci-dessous.
Développer ces factorisations pour vérifier qu'elles sont bonnes.
Associer chaque fonction à sa courbe. Ensuite, associer chaque courbe à son tableau de signe.

ⓐ $f(x) = 2x^2 - x - 1$

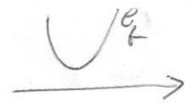
ⓑ $f(x) = -2x^2 - 3x + 9$

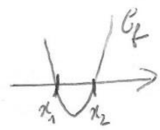
ⓒ $f(x) = x^2 + x + 1$

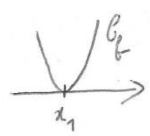
ⓓ $f(x) = -x^2 + x - 1$

ⓔ $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

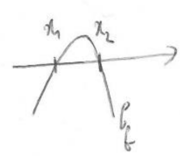
ⓕ $f(x) = -9x^2 + 6x - 1$

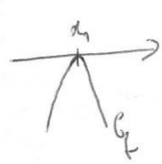
① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

⑥ 

(α)

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	

(β)

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$-$	0	$-$

(γ)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

(δ)

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	

(ε)

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
Signe de $f(x)$	$+$	0	$+$

(ζ)

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Solution :

a	b	c	d	e	f

Exercice 5

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes en utilisant S et P :

a) $x^2+5x-14=0$ **b)** $x^2-7x+12=0$

c) $x^2-8x+15=0$ **d)** $3x^2-6x-24=0$

2°) Trouver les deux racines (nombres) dont la somme S et le produit P sont :

a) $S=-1 \quad P=-12$ **b)** $S=15 \quad P=54$

c) $S=1 \quad P=-1$ **d)** $S=1 \quad P=-2$

3°) Factoriser les trinômes suivants :

a) $f(x)=x^2-3x+2$ **b)** $f(x)=x^2+3x+2$ **c)** $f(x)=x^2-x-2$

d) $f(x)=x^2+x-2$ **e)** $f(x)=x^2-5x+6$ **f)** $f(x)=x^2+5x+6$

g) $f(x)=x^2-x-6$ **h)** $f(x)=x^2+x-6$ **i)** $f(x)=x^2-5x-6$

j) $f(x)=x^2+5x-6$ **k)** $f(x)=x^2-7x+6$ **l)** $f(x)=x^2+7x+6$

4°) Déterminer un trinôme du second degré dont les racines sont :

a) $2;-3$ **b)** $1+\sqrt{3};1-\sqrt{3}$ **c)** $-1;-1$ **d)** $0;5$

5°) Une racine de l'équation $x^2+px+6=0$ est -2. Déterminer l'autre racine et déterminer le coefficient *p.*

6°) Une racine de l'équation $x^2-3x+q=0$ est -1. Déterminer l'autre racine et déterminer le coefficient *q.*

7°) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $x^2-1=0$ **b)** $x^2+x=0$ **c)** $4x^2-1=0$ **d)** $4x^2+1=0$

e) $5x^2-3x=0$ **f)** $x^2+6x+9=0$

Solutions :

1°) a) $S=-5=-7+2; P=-14=(-7)\cdot 2 \Rightarrow S=\{-7;2\}$ **b)** $S=7=3+4; P=12=3\cdot 4 \Rightarrow S=\{3;4\}$

c) $S=8=3+5; P=15=3\cdot 5 \Rightarrow S=\{3;5\}$

d) $3x^2-6x-24=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Rightarrow S=2=-2+4; P=-8=(-2)\cdot 4 \Rightarrow S=\{-2;4\}$

2°) a) $-4;3$ **b)** $6;9$ **c)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **d)** $2;-1$

3°)

a) $f(x)=(x-1)(x-2)$ **b)** $f(x)=(x+1)(x+2)$ **c)** $f(x)=(x+1)(x-2)$

d) $f(x)=(x-1)(x+2)$ **e)** $f(x)=(x-3)(x-2)$ **f)** $f(x)=(x+3)(x+2)$

g) $f(x)=(x+2)(x-3)$ **h)** $f(x)=(x-2)(x+3)$ **i)** $f(x)=(x+1)(x-6)$

j) $f(x)=(x+6)(x-1)$ **k)** $f(x)=(x-1)(x-6)$ **l)** $f(x)=(x+1)(x+6)$

4°) **a)** $S=2+(-3)=-1;\ P=2\cdot(-3)=-6 \Rightarrow f(x)=x^2+x-6$

4. Multiplication d'une courbe par un réel

Multiplication d'une courbe par un réel

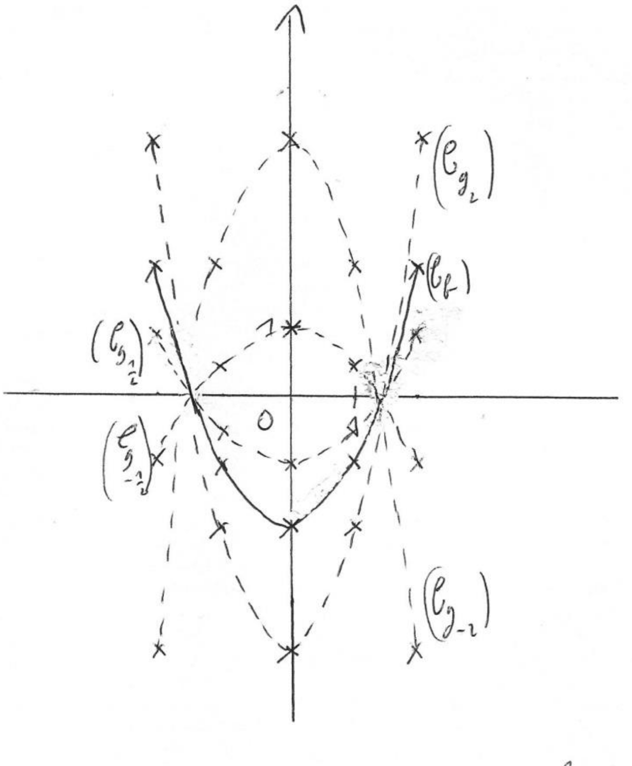
Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2$.

" " " g_2 " " $g_2(x) = 2f(x)$.

" " " g_{-2} " " $g_{-2}(x) = -2f(x)$.

" " " $g_{1/2}$ " " $g_{1/2}(x) = \frac{1}{2}f(x)$.

" " " $g_{-\frac{1}{2}}$ " " $g_{-\frac{1}{2}}(x) = -\frac{1}{2}f(x)$.



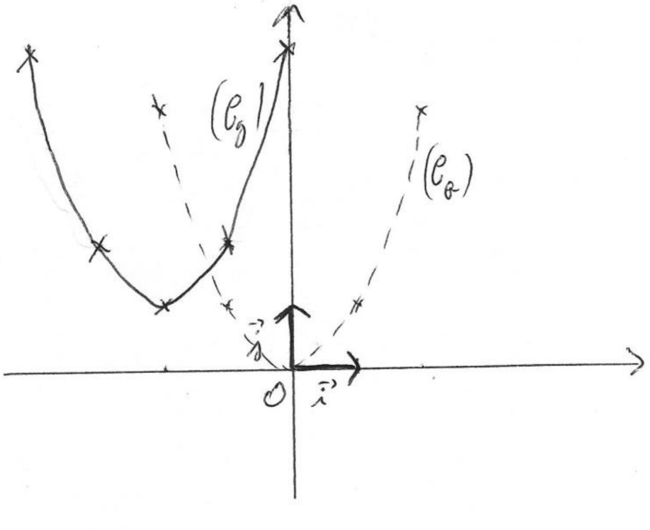
Quand on multiplie une fonction par un réel strictement positif, le signe et les variations ne changent pas.
Quand on multiplie une fonction par un réel strictement négatif le signe et les variations sont inversées.

5. Translation d'une courbe

$\boxed{\text{Translation d'une courbe}}$

Soit une fonction f.
Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x-a) + b$.
On a : la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
par la translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$.

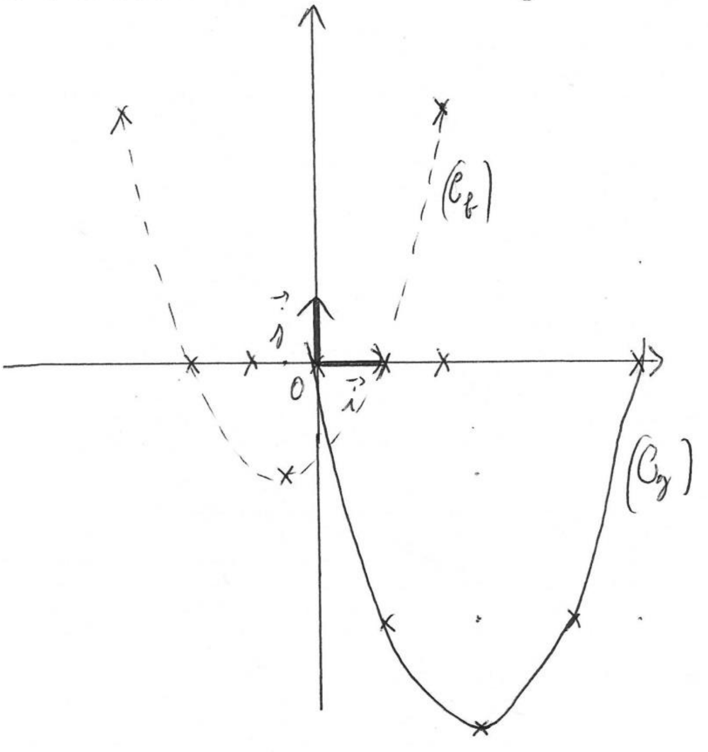
Exemple : $f(x) = x^2$ et $g(x) = (x+2)^2 + 1$
$g(x) = (x-(-2))^2 + 1 = f(x-(-2)) + 1$
la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de la courbe $(\mathcal{C}_f)$
par la translation de vecteur $-2\vec{i} + \vec{j}$.



Exemple : $f(x) = x^2 + x - 2$

$g(x) = (x-3)^2 + (x-3) - 2 \quad -4 = f(x-3) - 4$

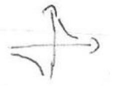
la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est l'image de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par la translation de vecteur $3\vec{i} - 4\vec{j}$.



6. La fonction inverse

$x \mapsto \frac{1}{x}$

Son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$.

Son schéma : 

Son tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 0$

Elle est impaire.
La fonction réciproque de la fonction inverse est la fonction inverse.

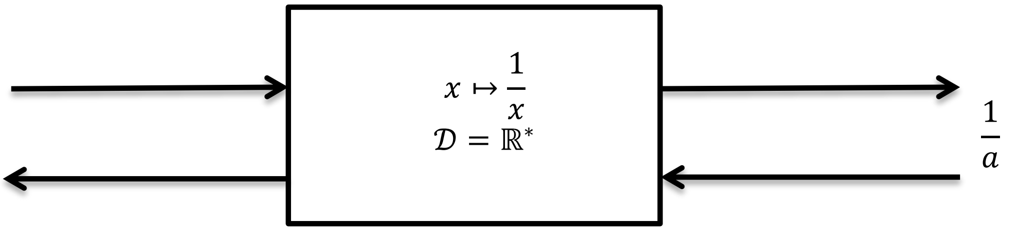
Tracer la courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormal $(O; I, J)$ d'unité graphique $1cm$.
Remarque : cette courbe est une hyperbole.

x	y
$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$	
1	
2	
4	

Soit f la fonction inverse.

Déterminons son domaine de définition.
Condition d'existence : $x \neq 0$.
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Montrons que la fonction réciproque de la fonction inverse est la fonction inverse.

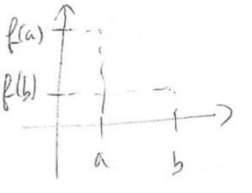


En effet, pour tout réel $a \neq 0$, $\frac{1}{\frac{1}{a}} = 1.\frac{a}{1} = a$.

Prouvons que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Si $\begin{cases} a \in]0;+\infty[\\ b \in]0;+\infty[\\ \quad a < b \end{cases}$ alors $\quad f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$

$a < b\,;\, a - b < 0$
$a > 0\,;\, b > 0\,;\, ab > 0$
$\frac{a-b}{ab} < 0$
$f(b) - f(a) < 0$
$f(b) < f(a)$.



Prouvons que la fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

Si $\begin{cases} a \in]-\infty;0[\\ b \in]-\infty;0[\\ \quad a < b \end{cases}$ alors $\quad f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \frac{a-b}{ab}$

$a < b\,;\, a - b < 0$
$a < 0\,;\, b < 0\,;\, ab > 0$
$\frac{a-b}{ab} < 0$
$f(b) - f(a) < 0$
$f(b) < f(a)$.

Prouvons que la fonction inverse est impaire.

(i) Prouvons que son domaine de définition est symétrique par rapport à 0.
$\forall x \in \mathcal{D}_f$: $\quad x \in \mathbb{R}^*$
$\quad -x \in \mathbb{R}^*$
$\quad -x \in \mathcal{D}_f$.

(ii) $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$.

Conclusion : la fonction inverse est impaire.

7. Les fonctions homographiques

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{où} \begin{cases} a, b \text{ et } c \text{ sont des réels} \\ c \neq 0 \\ ad \neq bc \end{cases}$$

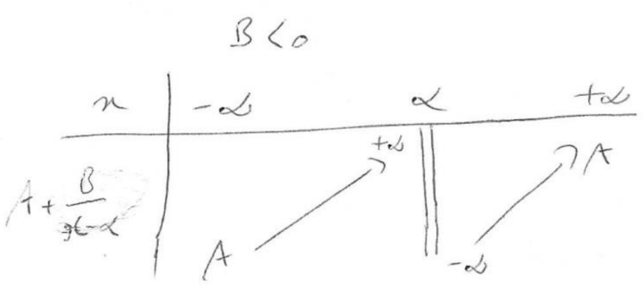
Soit f une fonction homographique.
Son domaine de définition est $\mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$.

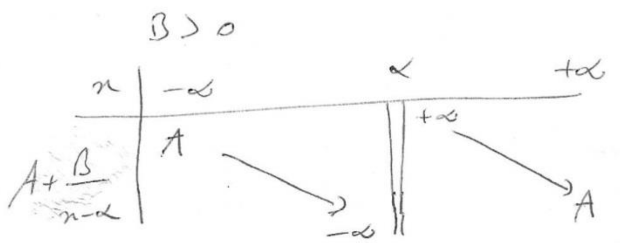
« Les fonctions

$$x \mapsto A + \frac{B}{x-\alpha} \quad \text{où} \begin{cases} A, B \text{ et } \alpha \text{ sont des réels} \\ B \neq 0 \end{cases}$$

correspondent exactement aux fonctions homographiques. »

Sa forme réduite : $x \mapsto A + \frac{B}{x-\alpha}$
Son tableau de variation :





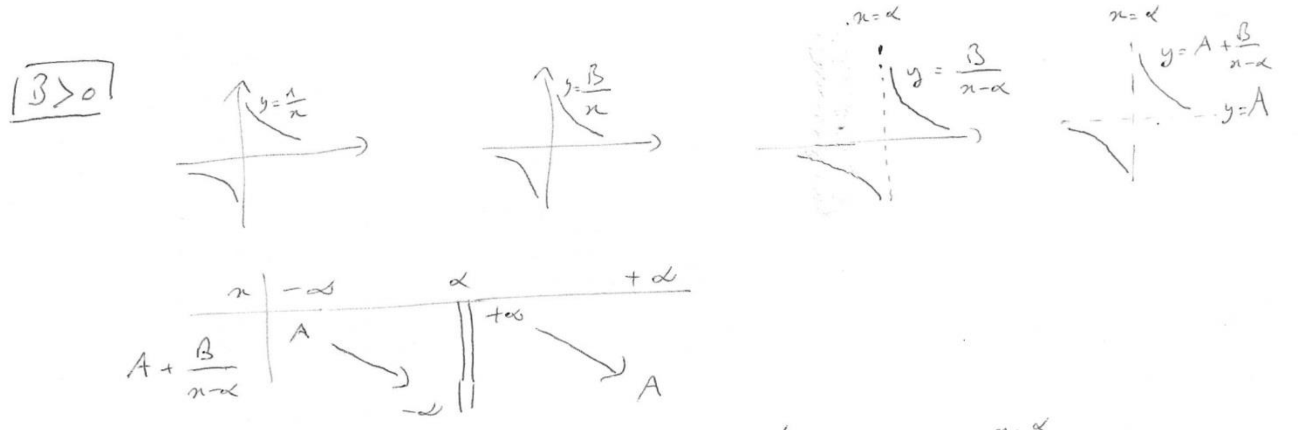
Dans un repère orthonormal, sa courbe est une hyperbole.

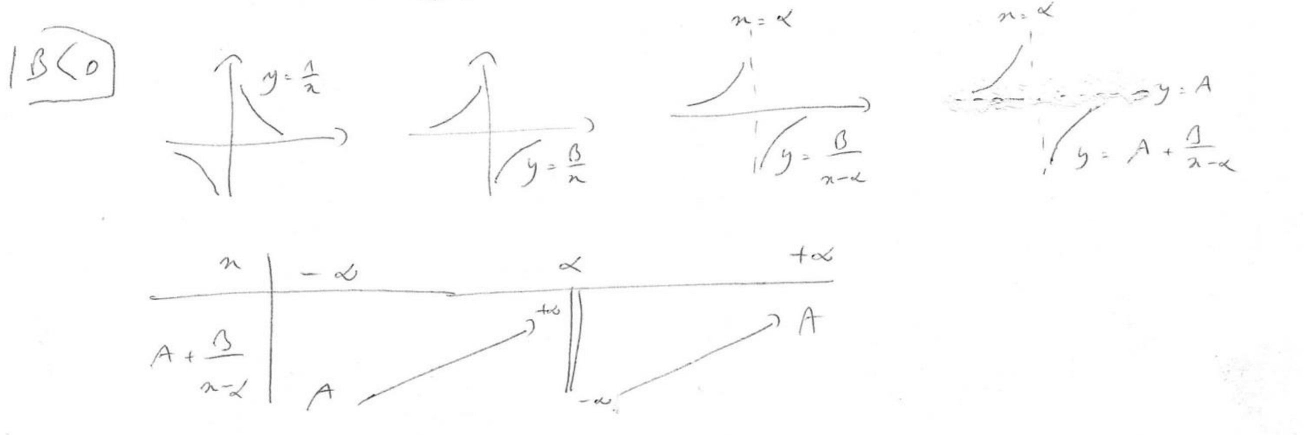
Déterminons son domaine de définition.

Condition d'existence : $cx + d \neq 0 \Leftrightarrow cx \neq -d \Leftrightarrow x \neq \frac{-d}{c}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{-d}{c}\right\}$

Déterminons son tableau de variation.





Exercice 6

Pour chaque fonction homographique ci-dessous :

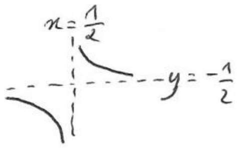
a) Déterminer la forme réduite de la fonction f.
b) Représenter schématiquement la courbe $\mathcal{C}_f$.
c) Construire le tableau de variation de la fonction f.
d) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.
e) Donner l'équation réduite de l'asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
f) Donner l'équation réduite de l'asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$.
g) Donner les coordonnées du centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$.
h) Calculer les coordonnées du point d'intersection (si il existe) de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.
i) Calculer les coordonnées du point d'intersection (si il existe) de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
j) Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) $f(x) = \frac{-x+4}{2x-1}$
2) $f(x) = \frac{-3x+4}{-2x-1}$
3) $f(x) = \frac{3x}{4x+9}$
4) $f(x) = \frac{5x-2}{-3x+1}$
5) $f(x) = \frac{2}{-x-4}$
6) $f(x) = \frac{2x+9}{x}$
7) $f(x) = \frac{x-4}{2x+1}$
8) $f(x) = \frac{-2x+7}{2x-6}$

Solution de l'exercice 6

Solutions

1) a) $f(x) = -\frac{1}{2} + \dfrac{\frac{7}{4}}{x - \frac{1}{2}}$ b)

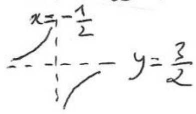


c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ e) $x = \frac{1}{2}$ f) $y = -\frac{1}{2}$ g) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ h) $(0; -4)$ i) $(4; 0)$

2) a) $f(x) = \frac{3}{2} + \dfrac{-\frac{11}{4}}{x + \frac{1}{2}}$ b)

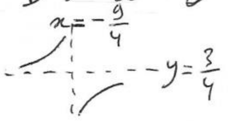


c)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{3}{2}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ e) $x = -\frac{1}{2}$ f) $y = \frac{3}{2}$ g) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ h) $(0; -4)$ i) $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$

3) a) $f(x) = \frac{3}{4} + \dfrac{-\frac{27}{16}}{x + \frac{9}{4}}$ b)

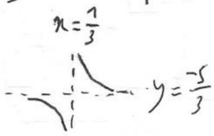


c)

x	$-\infty$		$-9/4$		$+\infty$
$f(x)$	$3/4$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$3/4$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{9}{4}\right\}$ e) $x = -\frac{9}{4}$ f) $y = \frac{3}{4}$ g) $\left(-\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right)$ h) $(0; 0)$ i) $(0; 0)$

4) a) $f(x) = -\frac{5}{3} + \dfrac{\frac{1}{9}}{x - \frac{1}{3}}$ b)

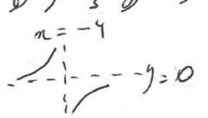


c)

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{5}{3}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\frac{5}{3}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ e) $x = \frac{1}{3}$ f) $y = \frac{-5}{3}$ g) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ h) $(0; -2)$ i) $\left(\frac{2}{5}; 0\right)$

5) a) $f(x) = \dfrac{-2}{x+4}$ b)

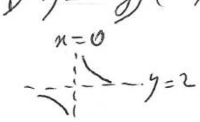


c)

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ e) $x = -4$ f) $y = 0$ g) $(-4; 0)$ h) $\left(0; \frac{-1}{2}\right)$ i) il n'y a pas de point d'intersection

6) a) $f(x) = 2 + \dfrac{9}{x}$ b)

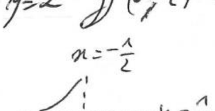


c)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e) $x = 0$ f) $y = 2$ g) $(0; 2)$ h) il n'y a pas de point d'intersection i) $\left(\frac{-9}{2}; 0\right)$

7) a) $f(x) = \frac{1}{2} + \dfrac{-\frac{9}{4}}{x + \frac{1}{2}}$ b)

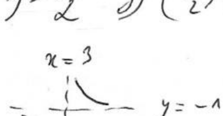


c)

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ e) $x = \frac{-1}{2}$ f) $y = \frac{1}{2}$ g) $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ h) $(0; -4)$ i) $(4; 0)$

8) a) $f(x) = -1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{x - 3}$ b)



c)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ e) $x = 3$ f) $y = -1$ g) $(3; -1)$ h) $\left(0; -\frac{7}{6}\right)$ i) $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$.

Exercice 7

Exercice 1 $\quad f(x) = 2x^2 - 3x - 2 \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, graphiquement, l'inéquation $f(x) \geqslant \frac{1}{3}x + 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$

$a = 2 > 0$

$S\left(\frac{-b}{2a} ; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$

$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(2)} = \frac{3}{4}$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) - 2$

$= 2\,\frac{9}{16} - 3\,\frac{3}{4} - 2$

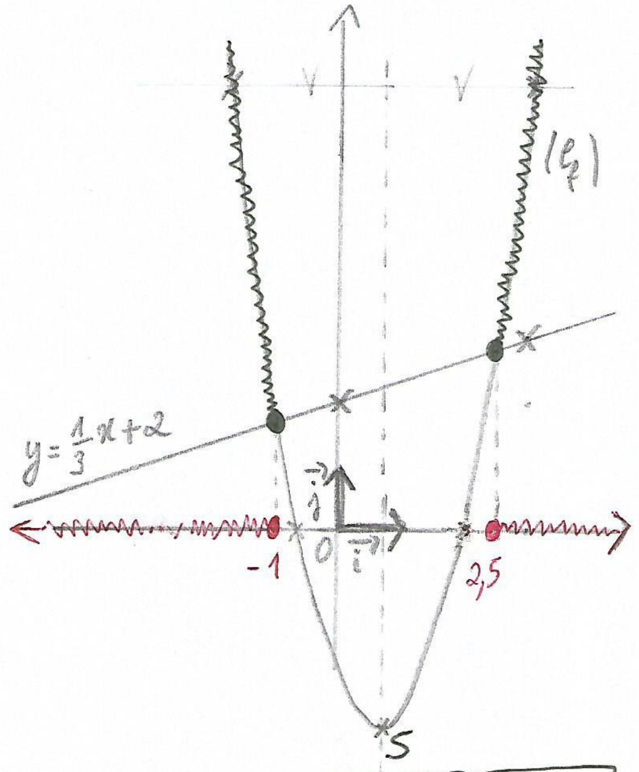
$= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} - \frac{16}{8}$

$= -\frac{25}{8}$

$S\left(\frac{3}{4} ; -\frac{25}{8}\right) \approx (0{,}8 ; -3{,}1)$

x	$f(x)$
2	$8 - 6 - 2 = 0$
3	$18 - 9 - 2 = 7$

x	$y = \frac{1}{3}x + 2$
0	2
3	$\frac{1}{3}(3) + 2 = 1 + 2 = 3$



$\boxed{S = \left]-\infty ; -1\right] \cup \left[2{,}5 ; +\infty\right[}$

b) En déduire les ensembles des solutions de :

① $f(x) > \frac{1}{3}x + 2$

② $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

③ $f(x) \leqslant \frac{1}{3}x + 2$

④ $f(x) < \frac{1}{3}x + 2$

b) ① $S = \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]2{,}5 ; +\infty\right[$

② $S = \{-1 ; 2{,}5\}$

③ $S = [-1 ; 2{,}5]$

④ $S = \left]-1 ; 2{,}5\right[$

Exercice 2

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, graphiquement, l'inéquation $f(x) \leqslant -2x + 1$.

b) En déduire les ensembles des solutions de :

① $f(x) < -2x + 1$

② $f(x) = -2x + 1$

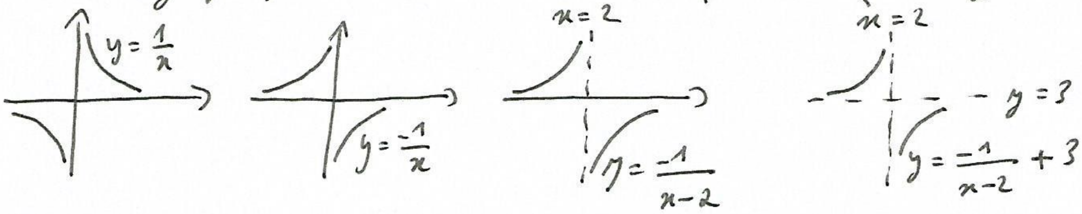
③ $f(x) \geqslant -2x + 1$

④ $f(x) > -2x + 1$

Exercice 1

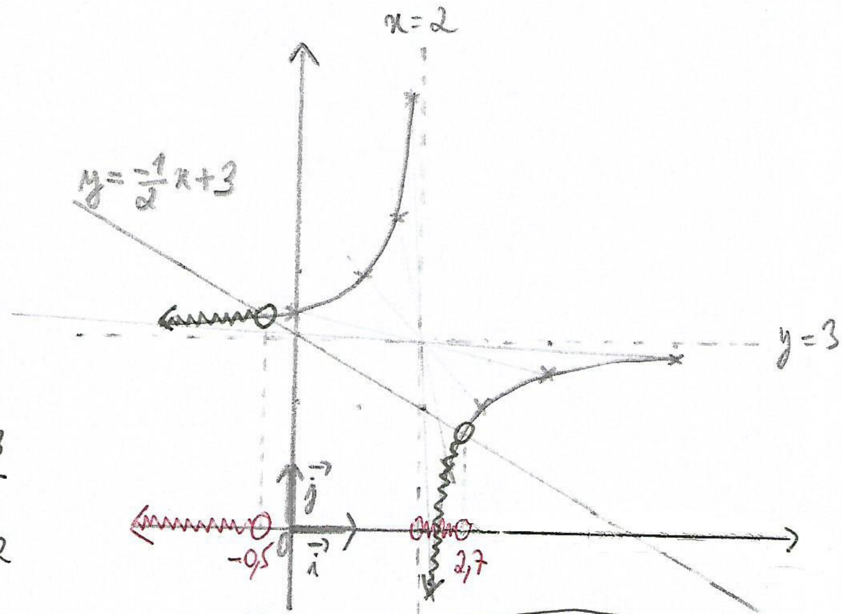
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x) = \dfrac{-1}{x-2} + 3$.

a) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < -\frac{1}{2}x + 3$.



x	$\frac{-1}{x}$
$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$
1	$-\frac{1}{1} = -1$
2	$-\frac{1}{2}$
4	$-\frac{1}{4}$

x	$y = -\frac{1}{2}x + 3$
0	3
2	$-\frac{1}{2}(2)+3 = 2$



$$\boxed{S =]-\infty ; -0{,}5[\cup]2 ; 2{,}7[}$$

b) En déduire les ensembles des solutions de :

① $f(x) \leq -\frac{1}{2}x + 3$

② $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

③ $f(x) > -\frac{1}{2}x + 3$

④ $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + 3$

b) ① $S =]-\infty ; -0{,}5] \cup]2 ; 2{,}7]$

② $S = \{-0{,}5 ; 2{,}7\}$

③ $S =]-0{,}5 ; 2[\cup]2{,}7 ; +\infty[$

④ $S = [-0{,}5 ; 2[\cup [2{,}7 ; +\infty[$

Exercice 2

a) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) > -\frac{1}{3}x + 4$

b) En déduire les ensembles des solutions de :

① $f(x) \geq -\frac{1}{3}x + 4$

② $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

③ $f(x) < -\frac{1}{3}x + 4$

④ $f(x) \leq -\frac{1}{3}x + 4$

Exercice 2 $\quad f(x) = 2x^2 - 3x - 2$

a) $f(x) \leq -2x+1$

$S = [-0{,}8\,;\,1{,}5]$

b) 1) $f(x) < -2x+1$

$S =]-0{,}8\,;\,1{,}5[$

2) $f(x) = -2x+1$

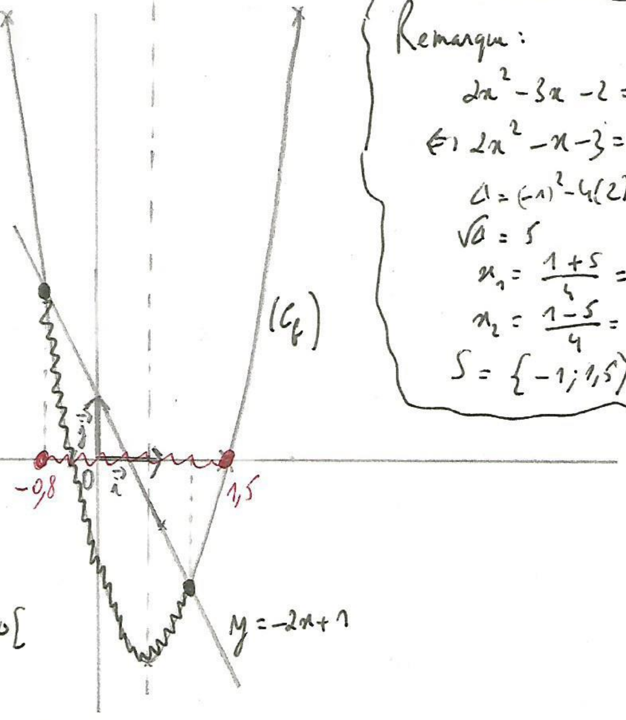
$S = \{-0{,}8\,;\,1{,}5\}$

3) $f(x) \geq -2x+1$

$S =]-\infty\,;\,-0{,}8] \cup [1{,}5\,;\,+\infty[$

4) $f(x) > -2x+1$

$S =]-\infty\,;\,-0{,}8[\cup]1{,}5\,;\,+\infty[$



Remarque :

$2x^2 - 3x - 2 = -2x + 1$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \quad (1)$

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(-3) = 25$

$\sqrt{\Delta} = 5$

$x_1 = \dfrac{1+5}{4} = 1{,}5$

$x_2 = \dfrac{1-5}{4} = -1$

$S = \{-1\,;\,1{,}5\}$

Exercice 2 $\quad f(x) = \dfrac{-1}{x-2} + 3$

a) $f(x) > -\frac{1}{3}x + 4 \qquad S =]0{,}7\,;\,2[\cup$

$S =]0{,}7\,;\,2[\cup]4{,}5\,;\,+\infty[$

b) 1) $f(x) \geq -\frac{1}{3}x+4$

$S = [0{,}7\,;\,2[\cup [4{,}5\,;\,+\infty[$

2) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

$S = \{0{,}7\,;\,4{,}5\}$

3) $f(x) < -\frac{1}{3}x+4$

$S =]-\infty\,;\,0{,}7[\cup]2\,;\,4{,}5[$

4) $f(x) \leq -\frac{1}{3}x+4$

$S =]-\infty\,;\,0{,}7] \cup]2\,;\,4{,}5]$